2014-2015	موضوع تجريبي	2BAC SM

Exercice (1)

1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2-(5-7i)Z-6-13i=0$

2) Le plan complexe est munie d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points A , B et C d'affixes respectivement

$a=1-2i$; $b=4-5i$ et $c=4+i$

a) calculer $\dfrac{b-a}{c-a}$ et déduire la nature du triangle ABC

b) déterminer l'affixe d du point D pour que $ABDC$ soit un carré

3) soit R la rotation de centre A et qui transforme le point B en C

a) vérifier que $\dfrac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle de R et que l'expression complexe de R s'écrit $Z'=iZ-1-3i$

b) soit M' l'image de M par la rotation R , montrer que $(CM')\perp(BM)$

Exercice (2)

(A) On rappel que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ un espace vectoriel réel . on considère l'ensemble

$$E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y\end{pmatrix} / (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} \text{ et on pose } J=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

1) a) montrer que $(E,+)$ est un groupe commutatif

b) montrer que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension

2) a) vérifier que $J^2=-I+2J$ et déduire que E est stable dans $(M_2(\mathbb{R},\times))$

b) montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire . est-il commutatif ?

(B) dans l'anneau unitaire $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ on considère $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

1) a) calculer A^2 et vérifier que $A^2+2A+I=\theta$. θ est la matrice nulle

b) déduire que A admet un inverse que l'on déterminera

2) montrer que $(\forall n\geq 2)$ $A^n=(-1)^{n-1}(nA+(n-1)I)$ (I la matrice unitaire)

2014-2015	موضوع تجريبي	2BAC SM

Exercice(3)

Soient p *un nombre premier tel que* $p \geq 3$ *et* (n, a) *un couple de* $\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$

1) *montrer que* $\left(a \equiv 1 \left[p^n \right] \text{ ou } a \equiv -1 \left[p^n \right] \right) \Rightarrow \left(a^2 \equiv 1 \left[p^n \right] \right)$

2) *on suppose* $a^2 \equiv 1 \left[p^n \right]$

a) *montrer que* $p \mid a-1$ *ou* $p \mid a+1$

b) *montrer que si* $p \mid a-1$ *alors* $(a+1) \wedge p = 1$

c) *déduire que* $a \equiv 1 \left[p^n \right]$ *ou* $a \equiv -1 \left[p^n \right]$

3) *résoudre dan* $\mathbb{N}^*$ *l'équation* $\overline{121}^{(x)} \equiv 1 \ [125]$

Exercice(4)

Partie(A)

Soit f *la fonction définie par :* $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$

1) *étudier les branches infinies de la courbe* (C_f)

2) *calculer* $f'(x)$ *et étudier le sens de variation de* f *puis donner le tableau de variation*

3) *tracer la courbe* (C_f)

4) a) *montrer que* f *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}^{*+}$

b) *tracer dans le repère précédant la courbe de la réciproque* f^{-1}

c) *déterminer* $f^{-1}(x)$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}^{*+}$

5) *soient un* λ *réel de* $\mathbb{R}^{*-}$ *et* S_λ *l'air du domaine limité par* (C_f) *les axes du repère et la droite d'équation* $x = \lambda$ *Calculer* S_λ *et déterminer* $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} S_\lambda$

Partie (B)

Pour tout entier naturel n *non nul et pour tout* x *de* $\mathbb{R}^-$ *on pose*

$$F_n(x) = \int_x^0 \frac{e^{nt}}{e^t + 1} dt$$

1) a) *calculer* $F_1(x)$ *et déduire que* $\lim\limits_{x \to -\infty} F_1(x) = \ln 2$

b) *déterminer* $\lim\limits_{x \to -\infty} F_2(x)$

2) a) *montrer que* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ F_{n+1}(x) + F_n(x) = \dfrac{1}{n}\left(1 - e^{nx}\right)$

b) montrer par récurrence que F_n *admet une limite finie en* $-\infty$

on pose $R_n = \lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)$

3) *a) montrer que* $(\forall t \le 0)\ 2e^t \le 1+e^t \le 2$

b) montrer que $(\forall n \ge 2)(\forall x \in \mathbb{R}^-)\ \dfrac{1}{2n}\left(1-e^{nx}\right) \le F_n(x) \le \dfrac{1}{2(n-1)}\left(1-e^{(n-1)x}\right)$

c) déduire un encadrement de R_n

4) *on pose* $G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt}dt$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}^*$

a) calculer $G_n(x)$ *et montrer que* $\lim\limits_{x\to-\infty} G_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}$

b) montrer que $(\forall n \ge 2)\ \sum\limits_{k=1}^{k=n} G_k(x) = -F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)$

5) *soit* $(U_n)_n$ *la suite définie par :* $U_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \dfrac{(-1)^k}{k}$

a) montrer que $U_n = \ln 2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}$

b) montrer que $(U_n)_n$ *est convergente en déterminant sa limite*